Lineare Algebra II

Lösungsvorschläge zum Tutoriumsblatt 8

Moritz Fleischmann

Zur Vorlesung von Prof. Dr. Fabien Morel, Dr. Andrei Lavrenov, Katharina Novikov und Oliver Hendrichs im Sommersemester 25

Disclaimer: Das sind keine offiziellen Lösungen, sondern nur eine getexte Version der Lösungen zu ausgewählten Aufgaben (Dank geht hierbei an Andrei Lavrenov für seine Lösungsskizzen), die ich in meinem Tutorium bespreche. Fehler, Fragen oder Anmerkungen gerne an m.fleischmann@mnet-online.de. Verteilung der Lösungen ist erlaubt und erwünscht.

Wie üblich, wen das Vorgeplänkel nicht interessiert, der kann die Lösungen in den grau hinterlegten Boxen finden. Es gilt grundsätzlich, dass $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$.

Aufgabe 1

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einer Basis $\mathcal{B}$ und $f : V \to V$ ein Homomorphismus mit darstellender Matrix A bezüglich $\mathcal{B}$. Wir nehmen an, dass A eine strikt obere Dreiecksmatrix ist, also von der Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * & * \\ 0 & 0 & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Zeige, dass f nilpotent ist.
2. Zeige, dass A^k (mindestens) $k-1$ Nulldiagonalen über der Hauptdiagonalen besitzt.

Lösung:

1. Wir wollen zeigen, dass f nilpotent ist, also dass es ein $k \in \mathbb{N}_+$ gibt, sodass $f^k = 0$ gilt. Um Aussagen dieser Form zu zeigen kann es oft hilfreich sein, wenn man das charakteristische Polynom, oder das Minimalpolynom bestimmt. In unserem Fall ist das sehr einfach - die Determinante einer allgemeinen oberen (oder unteren) Dreiecksmatrix ist das Produkt der Diagonaleinträge. Im Falle einer strikt oberen (oder unteren) Dreiecksmatrix gilt also für das charakteristische Polynom:
$$\chi_f(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{1}_n - A) = \lambda^n$$
Der Satz von Cayley-Hamilton besagt, dass für jeden Endomorphismus g gilt, dass $\chi_g(g) = 0$. In diesem Fall also
$$\chi_f(f) = f^n = 0$$
Das heißt direkt, dass unser Endomorphismus nilpotent ist.

2. Wir wollen zeigen, dass es (mindestens) $k-1$ Nulldiagonalen über der Hauptdiagonalen gibt, für alle $k \in \mathbb{N}$, also verwenden wir Induktion. Wir formulieren die Aussage leicht um und zeigen, dass A^k (mindestens) k Nulldiagonalen über der Hauptdiagonalen *inklusive der Hauptdiagonalen selbst* besitzt. Damit ist der Induktionsanfang klar:
   - *Induktionsanfang: $k = 1$:*
     Der Fall ist klar, laut Annahme ist die Hauptdiagonale von A eine Nulldiagonale, also

haben wir bereits $k = 1$ Nulldiagonalen gefunden.

- *Induktionsbehauptung:*
  Wir nehmen an, dass die Aussage für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt und überlegen uns, was das im Rahmen der Einträge bedeutet. Seien $\left(\alpha_{j,l}^{(k)}\right)_{j,l\in[n]}$ die Einträge von A^k. Dann wissen wir für die ersten k Einträge der ersten Zeile, dass sie alle Null sind. Für die zweite Zeile wissen wir, dass die ersten $k+1$ Einträge gleich Null sind und so weiter. Das bedeutet wir können annehmen, dass[a]

  $$\forall j \in [n], \forall l \in \{1, \dots, k+j-1\} : \alpha_{j,l}^{(k)} = 0$$

- *Induktionsschritt:* $k \to k+1$
  Wir wollen nun zeigen, dass die ersten $k+1$ oberen Diagonalen von A^{k+1} ausschließlich Nullen enthalten. Das heißt wir wollen zeigen, dass

  $$\forall j \in [n], \forall l \in \{1, \dots, k+j\} : \alpha_{j,l}^{(k+1)} = 0$$

  Da $A^{k+1} = A^k \cdot A$ gilt, können wir jeden dieser Terme mithilfe der Definition der Matrixmultiplikation bestimmen. Es gilt

  $$\alpha_{j,l}^{(k+1)} = \sum_{h=1}^{n} \alpha_{j,h}^{(k)} \cdot \alpha_{h,l}^{(1)}$$

  Sei nun $j \in [n]$ beliebig und $l \in \{1, \dots, k+j\}$. Es gilt nun abhängig von h:
  Ist $h \in \{1, \dots, k+j-1\}$, dann wissen wir aus der Induktionsbehauptung, dass $\alpha_{j,h}^{(k)} = 0$ gilt, die ersten $k+j-1$ Terme der Summe fallen also bereits weg.
  Sei nun $h > k+j-1$. Da wir nur die Fälle $l \in \{1, \dots, k+j\}$ betrachten, gilt auf jeden Fall $l \in \{1, \dots, h\}$, aber wir wissen aus der Annahme, dass $\alpha_{j,l}^{(1)} = 0$ für $l \in \{1, \dots, j\}$ gilt, also fallen auch die restlichen Terme aus der Summe weg. Insgesamt gilt also

  $$\alpha_{j,l}^{(k+1)} = 0$$

  was wir zeigen wollten. Mit vollständiger Induktion folgt die Behauptung.

[a] Hier und im Rest der Aufgabe nehmen wir an, dass die Indizes immer in $[n]$ liegen - ansonsten würde z.B. $l \in \{1, \dots, k+j-1\}$ für $k = 2, j = n$ zu einem Eintrag $\alpha_{n,n+1}^{(2)}$ führen, der nicht innerhalb der Matrix liegt, also nicht definiert ist. Üblicherweise werden solche Annahmen stillschweigend gemacht.

Aufgabe 2
Bestimme die Jordansche Normalform der folgenden Matrizen:

$$1. : A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. : B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Lösung:
Da in der Vorlesung nicht erklärt wurde, wie man die Jordansche Normalform bestimmt, wollen

wir das nun hier nachholen. Es gibt vor allem zwei Algorithmen[1] zur Bestimmung der Jordanschen Normalform. Einer davon funktioniert mit Haupträumen und Hauptvektoren, der andere mit den Elementarteilern, wir werden ersteren betrachten.
Die Erläuterung des Algorithmus wird sich auf dieses und nächstes Tutoriumsblatt verteilen. Heute werden wir uns überlegen, was die Anzahl der verschiedenen Jordanblöcke ist, da das für die heutige Aufgabe ausreichend ist. Nächste Woche schreibe ich eine Anleitung, wie man dann die Größen der Jordanblöcke bestimmen kann (Wobei man sich das mithilfe der heutigen Anleitung vielleicht auch schon herleiten kann.). Wir kürzen "Jordansche Normalform" mit JNF ab.
Zuerst zur Struktur der JNF:

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Sei $f: V \to V$ ein Endomorphismus und $\mathcal{B}$ eine Basis von V, sodass f durch eine Matrix A in Basis $\mathcal{B}$ dargestellt wird. Gibt es nun eine JNF von f, dann heißt das, dass es eine Basis $\mathcal{C}$ gibt (die Jordanbasis), in der die darstellende Matrix von f in der JNF ist. Es gibt also eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $SAS^{-1} = J$, wobei J die JNF von A ist. Sie sieht wie folgt aus:
Wir definieren zuerst den Jordanblock der Größe k zum Wert λ. Das ist eine Matrix der Form

$$J_{\lambda,k} := \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}}_{k} \in \mathbb{K}^{k\times k}$$

also eine $k \times k$-Matrix deren Hauptdiagonale nur λ als Einträge besitzt, während es darüber eine Diagonale aus Einsen gibt.[a] Die JNF von A wird nun durch die Jordanblöcke bestimmt. Das heißt es gibt ein $r \leq n$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$, sowie $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{N}$, sodass

$$J = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1,k_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2,k_2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{\lambda_{r-1},k_{r-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & J_{\lambda_r,k_r} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

wobei die λ_j hier nicht paarweise unterschiedlich sein müssen. Die Reihenfolge der Jordanblöcke ist dabei beliebig, man kann sie also permutieren, wie man will - durch Permutation der Basisvektoren von $\mathcal{C}$ bekommt man die unterschiedlichen Formen von J.

[a] Das ist nur eine mögliche Konvention, ich denke aber es ist die häufigste. Es gibt auch die Konvention, dass auf der Diagonalen -1 steht, oder dass es die Diagonale unterhalb der Hauptdiagonale ist.

Nachdem wir nun wissen, wie die Matrix aussieht, begründen wir den ersten Teil des Algorithmus:

Wir kennen aus der Vorlesung folgenden Satz:
Ein Endomorphismus $f: V \to V$ hat genau dann eine JNF, wenn das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt.
Insbesondere in $\mathbb{C}$, wo jedes Polynom in Linearfaktoren zerfällt, gibt es also immer eine JNF.

[1] Sicher gibt es 2941 verschiedene Algorithmen zur Bestimmung der Jordanschen Normalform, aber in der Vorlesung zur Linearen Algebra betrachten wir üblicherweise nur einen der beiden im Folgenden genannten. Andere Algorithmen haben dann häufig spezielle Anwendungszwecke, beispielsweise numerische Effizienz.

Über $\mathbb{R}$ muss man aber beispielsweise aufpassen. Es gibt noch die Jordanzerlegung:
Hat ein Endomorphismus $f : V \to V$ eine JNF, dann existieren ein diagonaler Homomorphismus $d : V \to V$ und ein nilpotenter Homomorphismus $\omega : V \to V$, sodass $f = d + \omega$ gilt.
Der nilpotente Endomorphismus ω wird in unserer Jordanbasis durch eine strikte obere Dreiecksmatrix dargestellt werden (vergleiche Aufgabe 1), während d auf der Diagonalen genau alle Eigenwerte von f haben wird. Die Bestimmung der Jordanbasis kommt wohl nächste Woche dran, wir wissen aber, dass es eine solche Basis gibt, wir nennen sie hier $\mathcal{C}$ und überlegen uns folgendes:

1. Die Jordanblöcke agieren auf Unterräumen, deren direkte Summe V ist. Vergleiche das mit entsprechenden Aufgaben auf den letzten Tutoriumsblättern. Wir merken uns, dass ein Jordanblock J_{λ_j,k_j} auf einem Unterraum V_j wirkt und dass für die Wirkung von f auf einen Vektor $v \in V_j$ jeweils nur dieser eine Jordanblock von Bedeutung ist. Das bedeutet insbesondere für ein $\lambda_h \in \mathbb{K}$

$$\dim\ker(J - \lambda_h \mathbb{1}_V) = \sum_{l=1}^{r} \dim\ker(J_{\lambda_l,k_l} - \mathbb{1}_{k_l}\lambda_h)$$

   wir können also, wenn wir die Dimension des Kerns von $J - \lambda_h \mathbb{1}_V$ bestimmen wollen, jeweils die Summe der Kerne aller Jordanblöcke betrachten.

2. Die Dimension ist jeweils sehr einfach zu bestimmen. Seien $j, h \in [r]$, seien also λ_j, λ_h zwei Eigenwerte. Wir betrachten nun

$$J_{\lambda_j,k_j} - \mathbb{1}_{k_j}\lambda_h = \begin{pmatrix} \lambda_j - \lambda_h & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j - \lambda_h & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_j - \lambda_h & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_j - \lambda_h \end{pmatrix}$$

   Die Diagonale hat als Einträge also 0, wenn $\lambda_j = \lambda_h$ und einen Wert ungleich Null, wenn $\lambda_j \neq \lambda_h$. Wir können also direkt ablesen, dass[a]

$$\dim\ker(J_{\lambda_j,k_j} - \mathbb{1}_V\lambda_h) = \delta_{j,h}$$

   ist.

Wir verwenden das nun wie folgt: Sei λ_h ein beliebiger Eigenwert von J, dann gilt:

$$\dim\ker(J - \mathbb{1}_V\lambda_h) = \sum_{j=1}^{r} \underbrace{\dim\ker(J_{\lambda_l,k_l} - \mathbb{1}_{k_l}\lambda_h)}_{\delta_{l,h}} = \text{Anzahl der Jordanblöcke zu } \lambda_h$$

das heißt, wenn wir die Anzahl der Jordanblöcke zu λ_h bestimmen wollen, dann können wir die Dimension des Kerns von $J - \mathbb{1}_V\lambda_h$ bestimmen. Sinnvoll wird das ganze dann mit folgender

Aussage: Sei S die Transformationsmatrix von A nach J, dann gilt:

$$\begin{aligned}\dim\ker(J - \mathbb{1}_V\lambda_h) &= \dim\ker(SAS^{-1} - SS^{-1}\mathbb{1}_V\lambda_h)\\ &= \dim\ker(S(A - \mathbb{1}_V\lambda_h)S^{-1})\\ &= \dim\ker(A - \mathbb{1}_V\lambda_h)\end{aligned}$$

wobei wir verwenden, dass S die Dimension des Kerns nicht ändert, da S invertierbar ist. Das heißt es ist ausreichend, wenn wir die Dimension des entsprechenden Kerns bezüglich A bestimmen.

[a] Zur Erinnerung: $\delta_{j,h}$ ist 1, falls $j = h$ und 0, falls $j \neq h$.

Wir fassen den Algorithmus noch einmal zusammen:

1. Zuerst bestimmen wir das charakteristische Polynom von A und dessen Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$.
2. Zu jedem der Eigenwerte λ_j bestimmen wir die Dimension des Kerns von $A - \mathbb{1}_V\lambda_j$. Das gibt uns die Anzahl der Jordanblöcke zu λ_j.
3. Wir betrachten die Vielfachheit der Nullstellen im Verhältnis zur Anzahl der Jordanblöcke. Gibt es nur eine einzige Möglichkeit (modulo Permutation der Reihenfolge) die Jordanblöcke unterzubringen, dann sind wir fertig. Andernfalls müssen wir die genaue Größe der Jordanblöcke bestimmen (nächste Woche).

Zur Erläuterung der letzten Aussage:

Angenommen wir haben das charakteristische Polynom einer Matrix A und die Anzahl der Jordanblöcke bestimmt und sei λ ein Eigenwert. Wenn die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 3 ist und die Anzahl der Jordanblöcke 2, dann gibt es nur die Möglichkeit einen Block der Größe 1 und einen Block der Größe 2 zu haben. In diesem Fall sind wir also fertig.
Sei dagegen die Vielfachheit des Eigenwerts 4 und die Anzahl der Jordanblöcke 2, dann könnte es einen Block der Größe 3 und einen Block der Größe 1 geben, oder zwei Blöcke der Größe 2 - in diesem Fall müssen wir also noch weiterrechnen.

Wir werden diesen Algorithmus nun auf die beiden gegebenen Matrizen anwenden:

1. Für

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

bestimmen wir das charakteristische Polynom

$$\det(\mathbb{1}_3 X - A) = (X-1)((X-4)(X+5)+18) = (X-1)^2(X+2)$$

das in Linearformen zerfällt, also gibt es eine Jordansche Normalform. Wir wissen, dass es Blöcke zum Eigenwert 1 gibt, deren Größen addiert 2 ergeben und einen Block der Größe 1 zum Eigenwert -2 - wir müssen also nur die Anzahl der Blöcke zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ bestimmen. Es gilt

$$A - \mathbb{1}_3 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

und da die zweite und dritte Zeile Vielfache der ersten Zeile sind, sehen wir, dass der Kern Dimension 2 hat. Es gibt also zwei Blöcke zum Eigenwert 1 und damit ist die Jordansche Normalform schon eindeutig festgelegt. Es gilt:

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Wir gehen analog vor. Zuerst bestimmen wir für

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

das charakteristische Polynom. Es gilt

$$\det(\mathbb{1}_3 X - B) = (X+1)((X-3)(X+5)+16) = (X+1)^3$$

also haben wir den dreifachen Eigenwert -1. Wir müssen hier die Anzahl der Jordanblöcke bestimmen. Es gilt

$$B + \mathbb{1}_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

und da die erste und dritte Spalte Vielfache voneinander sind, ist die Dimension des Kerns wieder 2 und es gibt zwei Jordanblöcke. Prinzipiell gibt es nun zwei Möglichkeiten diese anzuordnen, wir wählen beispielsweise:

$$J_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, V ein m-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f : V \to V$ ein nilpotenter Homomorphismus.

Sei $f^n = 0$ und $f^{n-1} \neq 0$, sei $v \in V \setminus \ker\left(f^{n-1}\right)$. Zeige, dass $v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v)$ linear unabhängig sind.

Lösung:

Angenommen die Vektoren wären linear abhängig, dann gäbe es eine nichttriviale Linearkombination der 0. Seien $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$, sodass mindestens ein $\alpha_j \neq 0$ und

$$\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j f^j(v) = 0$$

Sei nun k der minimale Koeffizient, sodass $\alpha_k \neq 0$, dann gilt immer noch:

$$\sum_{j=k}^{n-1} \alpha_j f^j(v) = 0$$

Wir bringen den ersten Term auf die andere Seite und teilen durch α_k:

$$f^k(v) = -\frac{1}{\alpha_k} \sum_{j=k+1}^{n-1} \alpha_j f^j(v)$$

Wir wenden f^{n-k-1} auf beide Seiten an und verwenden, dass $f^n = 0$ gilt. Wir erhalten:

$$f^{n-1}(v) = f^{n-k-1}(f^k(v)) = -\frac{1}{\alpha_k} \sum_{j=k+1}^{n-1} \alpha_j f^{n-k-1}(f^j(v)) = 0$$

denn alle Terme auf der rechten Seite enthalten f^{n+t} mit $t \geq 0$. Es gilt also

$$f^{n-1}(v) = 0$$

aber wir hatten $v \in V \setminus \ker(f^{n-1})$ gewählt, das ist ein Widerspruch, folglich kann es keine solche Linearkombination geben und die Vektoren sind linear unabhängig.

Aufgabe 4

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Sei $f : V \to V$ ein Homomorphismus. Angenommen f kommutiert mit allen anderen Endomorphismen, zeige, dass es ein $\alpha \in \mathbb{K}$ gibt, sodass $f = \mathbb{1}_V \alpha$.

Lösung:

Sei $g \in V^*$ und $x \in V$, sodass $g(x) \neq 0$.[a] Sei weiter

$$\alpha := \frac{g(f(x))}{g(x)} \in \mathbb{K}$$

Sei $v \in V$ beliebig. Wir zeigen, dass f auf v die gewünschte Wirkung hat und da v beliebig gewählt worden war, können wir folglich f allgemein so schreiben. Da f mit allen Endomorphismen kommutiert, natürlich auch mit[b]

$$\begin{aligned} f' : V &\to V \\ u &\mapsto g(u) \cdot v \end{aligned}$$

das heißt es gilt

$$f' f(v) = f(f'(v))$$

und damit gilt

$$g(f(x)) \cdot v = f'(f(x)) = f(f'(x)) = f(g(x) \cdot v) = g(x) \cdot f(v)$$

wobei wir die Definition von f', die Linearität von f und die Kommutativität von f mit f' verwendet haben. Damit erhalten wir

$$f(v) = \frac{g(f(x))}{g(x)} \cdot v = \alpha v$$

und die einzige Abbildung, die $f(v) = \alpha v$ für alle $v \in V$ erfüllt ist $\mathbb{1}_V \alpha$.

[a] Man kann hier (Übungsaufgabe) noch zeigen, dass so ein g und x tatsächlich existieren.

[b] Zeige, dass f' tatsächlich ein Homomorphismus ist.